



Tarea 1

Relatividad y Gravitación

Profesor: Máximo Bañados

Ayudante: Cristóbal Armaza (cyarmaza@uc.cl)

-
- Puede desarrollar sus respuestas a mano o en formato digital.
 - **Plazo de entrega: 15 de septiembre durante la cátedra.**
 - Una tarea ordenada hace a un corrector feliz.
-

Problemas a resolver

Problema 1: partículas superlumínicas. Los *taquiones* son partículas hipotéticas que pueden moverse a velocidades más altas que la de la luz. Suponga que un transmisor emite taquiones que se mueven con velocidad $u > c$ en su marco de referencia en reposo. Si un mensaje taquiónico es enviado a un observador en reposo a una distancia L ,

- ¿cuánto tiempo pasará antes de que una respuesta taquiónica sea recibida?
- ¿Cuánto tiempo pasara si el observador distante se mueve directamente hacia afuera con velocidad v , y se encuentra a una distancia L al momento en el que el recibe el mensaje y responde?
- Muestre que si $uv > 1 + (1 - v^2)^{1/2}$, la respuesta puede ser recibida *antes* de que la señal sea enviada. Esboce un diagrama espacio-tiempo que complemente la explicación de lo que sucede.

Problema 2. Dos anillos de igual radio r rotan con igual y opuesta velocidad angular ω en torno a un centro común. Suponga que una persona A se monta sobre un anillo y otra persona B se montra sobre el otro, y que en cierto instante ambas personas pasan una junto a la otra y sus relojes marcan el mismo tiempo. Al momento que ellos pasan uno junto al otro, B ve el reloj de A moviéndose más lentamente, por lo que ella espera pasar más adelante la próxima vez que ellos se encuentren. A, por su parte, espera justo lo opuesto. ¿Qué ocurre en realidad? ¿Cómo se reconcilian ambas observaciones?

Problema 3. Considere el vector

$$\{u^\lambda\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

el tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\{T^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

y el tensor $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\{R^{\alpha\beta 0}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \{R^{\alpha\beta 1}\} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{R^{\alpha\beta 2}\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

todos referidos a un espacio de base $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ con métrica dada por

$$\{\eta^{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenga

- el tensor $R^{\mu\nu\lambda}u_\lambda$;
- el vector $R^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu}$;
- el escalar $R^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu}u_\lambda$;
- todas las cantidades anteriores, pero ahora referidas a una nueva base dada por $\vec{e}'_0 = 2\vec{e}_0$, $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Problema 4. Considere la reacción $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, en la cual la partícula 2 está en reposo en el sistema de referencia del laboratorio en el cual se lleva a cabo la reacción. El sistema de referencia “centro de momentum” (cm) es aquel en el que $\mathbf{p}_1^{\text{cm}} + \mathbf{p}_2^{\text{cm}} = 0$.

- Muestre que $E_{\text{total}}^{\text{cm}} = (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2)^{1/2}$.
- Muestre que $E_1^{\text{cm}} = [(E_{\text{total}}^{\text{cm}})^2 + m_1^2 - m_2^2] / 2E_{\text{total}}^{\text{cm}}$.
- Una partícula A (con energía E) choca con una partícula B (en reposo) produciendo N partículas C_1, C_2, \dots, C_N . Calcule la energía *umbral* para esta reacción, en términos de las masas de las partículas.

Problema 5. Considere una fuente electromagnética que emite fotones de frecuencia ν_0 en su sistema de referencia en reposo. La fuente se mueve en línea recta con rapidez v . ¿Cuál es la frecuencia que mide un observador moviéndose en dirección perpendicular a la fuente, con rapidez u ? Expresar su resultado en términos del ángulo entre la dirección del fotón al momento de su emisión y la dirección del movimiento de la fuente. BONUS: si el observador no se mueve de forma perpendicular a la fuente, el resultado también dependerá del ángulo entre la dirección del fotón al momento de emisión y la dirección de movimiento del observador. Obtenga la frecuencia observada en este caso.